# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

### Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность

Пусть требуется при решении транспортной задачи ограничить перевозки от поставщика с номером к потребителю с номером *.* Возможны ограничения двух типов: 1) ; 2) *,* где  и  *—* постоянные величины.

1. Если*,* то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы *-*гопоставщика и запросы -гo потребителя на величину (зарезервировать перевозку ). В полученном оптимальном решении следует увеличить объем перевозки на величину *.*

2. Если*,* то необходимо вместо -гo потребителя с запросами ввести двух других потребителей. Один из них с номером должен иметь запросы *,* а другой с номером  — запросы *.* Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости , которая принимается равной сколь угодно большому числу *М*. После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к ()-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок -го потребителя. Так как  *—* самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером (,) останется пустой () и объем перевозки не превзойдет *.*

**Пример.** Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены втаблице, при дополнительных условиях: объем перевозки груза от второго поставщика второму потребителю должен быть не менее 200 единиц ( 200), а от третьего первому — не более 300 единиц ( 300).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 600 | 500 | 400 |
| 300 | 2 | 9 | 10 |
| 400 | 2 | 11 | 13 |
| 500 | 4 | 10 | 12 |

**Решение.** Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки  был не менее 200 единиц, при решении задачи будем предполагать, что запасы второго поставщика  и запросы второго потребителя  меньше фактических на 200 единиц. После получения оптимального решения объем перевозки  увеличим на 200 единиц.

Для того чтобы выполнялось требование  300, вместо первого потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запросы = 300 единиц и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны = 600 - 300 = 300 единиц и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у первого потребителя, за исключением стоимости , которую примем равной сколь угодно большому числу , т.е. . После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для четвертого потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для первого потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь следующий вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 300 | 300 | 400 | 300 |
| 300 | 2 | 9 | 10 | 2 |
| 200 | 2 | 11 | 13 | 2 |
| 500 | 4 | 10 | 12 |  |

Далее задачу решаем обычным методом потенциалов. Вводим фиктивного поставщика с запасами 300 единиц, составляем начальное опорное решение методом минимальной стоимости, находим потенциалы, вычисляем оценки для свободных клеток. В зависимости от оценок перераспределяем поставки. В результате получаем оптимальное распределение поставок:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 300 | 300 | 400 | 300 |
| 300 | 2  200 | 9 | 10 | 2  100 |
| 200 | 2 | 11 | 13 | 2  200 |
| 500 | 4  100 | 10  300 | 12  100 |  |
| 300 | 0 | 0 | 0  300 | 0 |

Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки  на 200 единиц и объединим объемы перевозок четвертого потребителя с объемами перевозок первого потребителя. Получим:

.

Вычислим значение целевой функции на оптимальном решении:



**Ответ**: при .

### Транспортная задача по критерию времени

Задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной транспортной задаче, имеется  поставщиков с запасами однородного груза в количестве  и  потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объемах . Из­вестны ,  — интервалы времени, за которые груз доставляется от каждого -гo поставщика каждому -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и наибольшее время доставки всех грузов является минимальным.

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим  — объем перевозимого груза от -ro поставщика -му потребителю. Система ограничений задачи не отличается от системы ограничений обычной транспортной задачи. Пусть

,  — некоторое опорное решение задачи. Запишем целевую функцию задачи. Обозначим через  наибольшее значение элементов матрицы ,  соответствующих клеткам таблицы, занятым опорным решением: =. Таким образом, за время  план перевозок будет выполнен полностью.

*Математическая модель транспортной задачи по критерию времени* имеет вид

=,

, ,

,

, .

Задача решается в следующем порядке. Находится начальное опорное решение . Определяется значение целевой функции



Все свободные клетки, которым соответствуют значения >, исключаются из рассмотрения (перечеркиваются). Занимать эти клетки нецелесообразно, так как увеличится значение целевой функции. Чтобы уменьшить ее значение, необходимо освободить клетку , в которой  достигает максимума. Для этого строят так называемые разгрузочные циклы, которые могут включать в свой состав несколько свободных клеток. В каждом разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой клетки , расставляются поочередно знаки «–» и «+» и осуществляется сдвиг на величину θ. Если удается эту клетку разгрузить, то она исключается из рассмотрения (зачеркивается). Получается новое опорное решение , на котором значение целевой функции меньше, чем на . Далее снова пытаются разгрузить клетку, соответствующую

Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую клетку не исчезнет.



**Пример.** Найти минимальное время на осуществление всех перевозок для следующей задачи:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 20 | 40 | 50 | 70 |
| 30 | 13 | 8 | 7 | 11 |
| 40 | 6 | 7 | 9 | 8 |
| 50 | 5 | 12 | 5 | 10 |
| 60 | 19 | 6 | 14 | 4 |

**Решение**. Составим начальное опорное решение  методом северо-западного угла. Максимум целевой функции = достигается в клетке (1, 1). Перечеркнем клетки (4, 1) и (4, 3), в которых время доставки груза  и  больше = 13. Для улучшения решения разгружаем клетку (1, 1) с помощью цикла (2, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2). В означенном цикле находим θ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 20 | 40 | 50 | 70 |
| 30 | 13  20  – | 8  10  + | 7 | 11 |
| 40 | 6  + | 7  30  – | 9  10 | 8 |
| 50 | 5 | 12 | 5  40 | 10  10 |
| 60 | 19 | 6 | 14 | 4  60 |

Осуществляя сдвиг по циклу, получаем второе опорное решение :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 20 | 40 | 50 | 70 |
| 30 | 13 | 8  30  + | 7 | 11 |
| 40 | 6  20 | 7  10 | 9  10  – | 8  + |
| 50 | 5 | 12 | 5  40  + | 10  10  – |
| 60 | 19 | 6 | 14 | 4  60 |

Максимум целевой функции = достигается в клетке (3, 4). Перечеркиваем клетки (1, 1) и (1, 4) и (3, 2), в которых время доставки груза ,  и больше, чем = 10.

Разгружаем клетку (3, 4) с помощью цикла (2, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 3). В означенном цикле находим θ. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем третье опорное решение . Максимум целевой функции на этом опорном решении = достигается в клетках (1, 2) и (2, 4). Перечеркиваем клетки (2, 3) и (3, 4), в которых время доставки груза больше, чем = 8:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 20 | 40 | 50 | 70 |
| 30 | 13 | 8  30 | 7 | 11 |
| 40 | 6  20 | 7  10 | 9 | 8  10 |
| 50 | 5 | 12 | 5  50 | 10 |
| 60 | 19 | 6 | 14 | 4  60 |

С помощью оставшихся невычеркнутых клеток разгрузить клетки (1, 2) и (2, 4) не удается, поэтому  является оптимальным решением.

**Ответ**:  при .